LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
« 3^{EME}MATHS »

2015/2016
SERIE D'EXERCICES N°8
Arithmétique

EXERCICE N1:

Résoudre dans IN^2 dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4625 \\ a \vee b = 440 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a \wedge b = a - b \\ a \vee b = 72 \end{cases}$; c) $a \vee b - a \wedge b = 8$

EXERCICE N2:

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que b soit impaire et que 7 ne divise pas b.

1) Montrer que les entiers 2 et b sont premiers entre eux.
2) Montrer que si 14 divise a.b alors 7 divise a.
3) En déduire que si 14 divise a.b alors 14 divise a^2.

EXERCICE N3:

1) Soit p un nombre premier différent de 3. Montrer, à l'aide du petit théorème de Fermat, que pour tout entier naturel n, on a : $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.
2) Déterminer les nombres premiers p tels que p divise $8^p + 20$
3) a) A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout x$\in IN^*$ on a : $(x+1)^{13} - 1$ est divisible par x
   b) En déduire que pour tout entier naturel a, on a : $a^{13} - a$ est pair.
   c) Montrer alors que $a^{13} - a$ est divisible par 26.

EXERCICE N4:

1) Vérifier que 2047 n'est pas un nombre premier.
2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls distincts.
   a) Vérifier que $2^{pq} = [(2^p - 1) + 1]^q$
   b) En déduire que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$
   c) Vérifier de même que $2^q - 1$ divise $2^{pq} - 1$
3) On appelle nombre de MERSENNE tout nombre de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel ≥ 2.
   a) Vérifier que 2047 est un nombre de MERSENNE.
   b) Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier. (On pourra raisonner par l'absurde)
   c) A-t-on si n est premier alors $2^n - 1$ est premier ? Justifier la réponse.

EXERCICE N5:

I/ Montrer par récurrence que l'entier $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ est divisible par 7.

II/ 1) Soit n $\in$IN. Montrer que n est divisible par 14 si et seulement si n est divisible par 7 et par 2.

2) Montrer que $n^7 - n$ est divisible par 14

3) Déterminer le reste de la division euclidienne de 32009^7 −1430 par 14.

EXERCICE N6:

Soit p un entier naturel non nul distinct de 1.

Montrer que si p divise (n-1)!+1 Alors p est premier. (On pourra raisonner par l'absurde)

EXERCICE N7:

1) Soit n$\in$IN$\setminus\{0,1\}$. Montrer que les entiers naturels suivants ne sont pas premiers :

n!+2 ; n!+3 ; …… ; n!+n.

2) Donner alors 100 entiers naturels non premiers consécutifs.

EXERCICE N8:

Soit p un entier naturel premier.

1) Vérifier que pour tout entier naturel k tel que 0<k<p, on a : k.$C_p^k = p.C_{p-1}^{k-1}$

2) En déduire que p divise C_p^k

3) En déduire que pour tout entier naturel x, on a : p divise $(x+1)^p - 1 - x^p$

EXERCICE N9:

Soit n$\in$ IN^*. On appelle indicateur d'Euler de l'entier n, noté $\varphi(n)$ le nombre des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et k$\wedge$n=1.

Calculer $\varphi(2)$; $\varphi(6)$; $\varphi(13)$; $\varphi(p)$ et $\varphi(p^2)$ avec p est un entier naturel premier.

(pour p^2 on pourra calculer le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et k$\wedge$n$\neq$1).

EXERCICE N10:

On désigne par $a_n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$; n$\in$ $IN^*\setminus\{1\}$ avec p_i le $i^{éme}$ nombre premier $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

1) Vérifier que $p_2 \leq a_2$, que $p_3 \leq a_3$ et que $p_4 \leq a_4$

2) a) Montrer que le nombre a_n n'admet aucun diviseur premier dans l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}\}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

b) En déduire que pour tout n$\in$ $IN^*\setminus\{1\}$, on a : $p_n \leq a_n$

EXERCICE N11:

1) Calculer le reste de la division euclidienne par 13 de 5^n pour tout entier n$\in$ $\{1,2,3,4,5,6,\}$

2) a) Montrer par récurrence sur n que $5^{4n}-1$ est divisible par 13.

b) En déduire que $5^{4n+1}-5$, $5^{4n+2}-12$ et $5^{4n+3}-8$ sont divisibles par 13.

c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 5^{2011}

3) On considère le nombre $A_p = 5^{2p} + 5^{4p}$ avec p est un entier naturel.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de A_p par 13 tel que p=2n.

b) Montrer que si p=2n+1 alors A_p est divisible par 13.

EXERCICE N12:

1) a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD de 1995 et 735.

b) Trouver alors tous les couples d'entiers naturels (x,y) vérifiant :

735(x−1)−1995(y+3)=0

2) On pose $\alpha = 3^{240} + 3^{120} + 1$ et $\beta = 3^{120} + 1$

a) Montrer que tout diviseur commun de α et β, divise 3^{240}.

b) En déduire que α et β sont premiers entre eux.

c) Montrer que α divise $(3^{360} - 1)$ et β divise $(3^{240} - 1)$.

d) En déduire le PGCD de $(3^{360} - 1)$ et $(3^{240} - 1)$.

EXERCICE N13:

Montrer par récurrence chacune des propriétés suivantes :

a) Le nombre $n^2 + n + 1$ est un entier naturel pair ∀ n∈IN

b) L'entier naturel $S_n = 1 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}$ est égale à :

1+(n−1)$.2^n$ ∀ n∈ IN^*

c) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11 ∀ n∈IN

EXERCICE N14:

Soit a un entier naturel premier ≥7.

1) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $a^4 - 1$ est pair.

2) Montrer que l'entier $a^4 - 1$ est divisible par 10.

3) a) Déterminer l'ensemble E des diviseurs de l'entier a^4.

b) Montrer que si d est un diviseur (distinct de 1) de l'entier $a^4 - 1$, alors d ∉E.

EXERCICE N15: (Vrai ou faux)

1) Deux entiers naturels premiers distincts p et q sont premiers entre eux.

2) Soit p un entier naturel premier. Alors p est premier avec tout entier de l'ensemble $\{1,2,3, \dots, p-1\}$

3) Tout nombre impair est premier.

4) Soit x et y deux entiers distincts de IN^*. Si x+y est un nombre premier alors x∧y=1.

5) Le nombre 997 est premier.

6) Le coefficient de x^5 dans le développement de $(1 + x)^9$ est 128.

EXERCICE N16:

Soit x un entier naturel distinct de 1. On désigne par : A=$1+x+2x^2+x^3+x^4$

Montrer que le nombre A n'est pas premier.

EXERCICE N17:

Soit l'entier x= $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ +1 avec α, β et γ sont trois entiers naturels non nuls.

On note p un diviseur premier de x. Montrer que p≥7. (On pourra raisonner par l'absurde)

EXERCICE N18:

1) Montrer que le nombre $3^{52}-1$ est divisible par 53.

2) Montrer que Pour tous entiers naturels a et b on a : a(ab^2-b) est un nombre pair.

3) Déterminer les nombres premiers p tels que p divise (3^p +7)

4) Soit a, b et x trois entiers naturels premiers distincts deux à deux.

   Déterminer ab∧ x^2 puis montrer que $(x^{a-1}-1)(x^{b-1}-1)$ est divisible par ab

EXERCICE N19:

Soit x un entier naturel distinct de 1.

1) a) Factoriser l'expression $(x^{11}-x)$. (On pourra se servir de la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

   b) En déduire que $(x^{11}-x)$ est pair.

2) Montrer que $(x^{11}-x)$ est divisible par 22.

EXERCICE N20:

1) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $10^{3(n+1)}-(-1)^{n+1}=1000\times 10^{3n}-(-1)^n\times 1000+(-1)^n\times 1001$

2) Montrer par récurrence que pour tout n ∈ IN^*, on a : 1001 divise $10^{3n}-(-1)^n$

3) En déduire que l'entier 1 000 000 000 000 001 est divisible par 1001.

4) Déterminer les entiers naturels n impairs tels que le nombre $\frac{10^{3n}-(-1)^n+9999}{10^{n-1}}$ ∈IN

EXERCICE N21:

Soit l'entier $a_n=4^n-1$; n∈IN

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : a_n est divisible par 3

   b) En déduire que $4^{n+1}-4$ est divisible par 3.

   c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 3 du nombre 2^{102}

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls distincts.

   a) Vérifier que 4^{pq} =$[(4^p-1)+1]^q$

   b) A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que 4^p-1 divise $4^{pq}-1$

   c) En déduire que si pour n∈ $IN^*\backslash\{1\}$, a_n est premier alors n est premier.

   (On pourra raisonner par l'absurde)

3) A l'aide du petit théorème de Fermat, déterminer l'ensemble des entiers naturels premiers k tels que k divise a_k.

GAUSS a dit: L'arithmétique est la reine des mathématiques